ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XXVI, 19 SECTIO H 1992

Zakład Nauk Ekonomicznych Filii UMCS w Rzeszowie

Elżbieta MAKSYMIAK

Porównanie mierników współliniowości

A Comparison of the Measurements of Colinearity

Aktualny stan wiedzy na temat współliniowości zmiennych objaśniających jest w literaturze bardzo obszerny. Szczególnie dużo jest publikacji na temat ujemnych skutków współliniowości w procesie estymacji paramterów strukturalnych metodą najmniejszych kwadratów. Do najważniejszych prac dotyczących tego problemu można zaliczyć [4], [5], [11], [19]. Ponieważ zjawisko współliniowości ma szczególnie negatywny wpływ na szacowanie modelu klasycznymi metodami estymacji, dlatego w literaturze pojawiło się wiele prac na temat metod eliminujących współliniowość zmiennych. Są to między innymi metoda regresji grzbietowej podana przez E. Hoerla i W. Kennarda w pracy [9], metody ortogoalizacyjne (por. prace: [7], [10], [12], [13], [16], [17], [18]), metoda różniczki zupełnej, opisana np. w pracy [14] i metoda transformacji zmiennych (por. [16]). Ze względu na brak precyzyjności w definicji współliniowości zmiennych objaśniających, która mówi, że zmienne objaśniające są współliniowe, jeżeli co najmniej jedna z nich jest silnie skorelowana z pozostałymi, opracowano w literaturze dużą liczbę kryteriów, na podstawie których mierzy się natężenie współliniowości.

Niniejszy artykuł poświęcony jest eksperymentowi symulacyjnemu dotyczącemu porównań charakterystyk zmienności funkcji opisujących pewne wybrane mierniki współliniowości w zależności od natężenia współliniowości między zmiennymi objaśniającymi liniowego modelu ekonometrycznego. Miernikami współliniowości, które badano w przeprowadzonym eksperymentcie były:[1]

[1] We wszystkich rozważanych miernikach współliniowości k oznacza liczbę zmiennych

— integralny współczynnik zasobu informacji brutto

$$Q = \sum_{j=1}^{k} r_{YX_j}^2,$$

gdzie r_{YX_j} jest współczynnikiem korelacji między zmienną objaśnioną Y a j-tą zmienną objaśniającą X_j,

— integralny współczynnik zasobu informacji netto

$$G = \sum_{j=1}^{k} g_j,$$

gdzie

$$g_j = \begin{cases} \hat{\beta}_j r_{YX_j} & , \text{gdy } \hat{\beta}_j r_{YX_j} > 0 \\ 0 & , \text{gdy } \hat{\beta}_j r_{YX_j} \leq 0 \end{cases},$$

przy czym $\hat{\beta}_j$ jest oceną j-tego parametru strukturalnego β_j modelu,

— integralny współczynnik zasobu informacji powtórzonej

$$F' = Q - G,$$

— integralny współczynnik pojemności

$$H = \sum_{j=1}^{k} h_j,$$

gdzie

$$h_j = \frac{r_{YX_j}^2}{1 + \sum_{i=1, i \neq j}^{k} |r_{X_i X_j}|},$$

— statystyka Farrara—Glaubera

$$\chi_F^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2k + 5)\right] \log \det R,$$

gdzie R jest macierzą współczynników korelacji między zmiennymi objaśniającymi, zaś n oznacza liczbę obserwacji zmiennych modelu,

— statystyka Haitovskiego

$$\chi_H^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2k + 5)\right] \log(1 - \det R),$$

objaśniających modelu. Bliższe informacje na temat tych mierników można znaleźć np. w pracach: [1], [3], [5], [6], [8], [15].

— integralny współczynnik współliniowości

$$\lambda = Q - R^2,$$

gdzie R^2 jest współczynnikiem determinacji,

— przeciętny współczynnik indywidualnej współliniowości

$$\bar{\delta} = \left(\frac{\sum_{j=1}^{k} \delta_j^2}{k}\right)^{\frac{1}{2}},$$

gdzie

$$\delta_j = \sqrt{1 - \frac{\det R}{\det R_{jj}}}$$

przy czym $\det R_{jj}$ jest minorem głównym macierzy R otrzymanym przez skreślenie j-tego wiersza oraz j-tej kolumny,

— przeciętny współczynnik Farrara—Glaubera

$$\bar{\omega} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \omega_j,$$

gdzie

$$\omega_j = (r^{jj} - 1)\frac{n-k}{k-1},$$

przy czym r^{jj} jest j-tym elementem głównej przekątnej macierzy R^{-1},

— przeciętny współczynnik zasobu informacji brutto

$$\bar{Q} = \sqrt{\frac{Q}{k}}$$

— przeciętny współczynnik korelacji między zmiennymi objaśniającymi

$$\bar{r} = \sqrt{\frac{\sum_{i,j=1, i \neq j}^{k} r_{X_i X_j}^2}{k(k-1)}},$$

— ogólny współczynnik współliniowości

$$g = \frac{\bar{Q}}{\bar{r}},$$

— przeciętna wartość statystyk Studenta

$$\overline{t(\hat{\beta})} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{k}(t(\hat{\beta}_j))^2}{k}},$$

— przeciętny współczynnik regresji standaryzowanej

$$\bar{\tilde{\beta}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{k}(\tilde{\beta}_j)^2}{k}},$$

gdzie $\tilde{\beta}_j$ jest oceną j-tego parametru strukturalnego β_j modelu o zmiennych standaryzowanych na $0 - 1$,

— przeciętny współczynnik określoności indywidualnej

$$\bar{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{k}(\bar{d}_j)^2}{k}},$$

gdzie

$$\bar{d}_j = \sqrt{\hat{\beta}_j \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_{ij} - \bar{x}_j)}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}},$$

przy czym y_i , x_{ij} są i-tymi realizacjami odpowiednio zmiennych Y oraz X_j, zaś

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,$$

— przeciętny współczynnik zasobu informacji netto

$$\bar{G} = \frac{G}{k},$$

— przeciętny standaryzowany współczynnik współliniowości

$$\bar{m} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{k} m_j^2}{k}},$$

gdzie

$$m_j = \sum_{i=1}^{k} \tilde{\beta} i \tilde{\beta} j r_{X_i X_j},$$

— przeciętny współczynnik integralnej koincydencji

$$\bar{p} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{k} p_j^2}{k}},$$

gdzie

$$p_j = \sum_{i=1}^{k} r_{X_i X_j} d_i d_j - 2 d_j r_{Y X_j}$$

zaś d_i jest i-tą współrzędną wektora $d = U^{-1} R_0$, przy czym R_0 oznacza k-elementowy wektor o współrzędnych r_{YX_j}, natomiast U jest macierzą o elementach równych

$$u_{ij} = r_{YX_i} r_{YX_j} \quad (i,j = 1,2,\cdots,k; i \neq j)$$
$$u_{ij} = 1 \quad (j = 1,2,\cdots,k),$$

— przeciętny współczynnik pojemności

$$\bar{H} = \frac{H}{k}.$$

Aby móc przeprowadzić eksperyment symulacyjny na wyżej przedstawiony temat należało przede wszystkim zaprojektować taki model ekonometryczny, w którym można by było zmieniać natężenie współliniowości w zbiorze zmiennych objaśniających. Modelem takim był model, dla którego macierz korelacji między zmiennymi objaśniającymi miała następującą postać:[2]

$$R_{(k.p)}(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a & \cdots & a \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a & 1 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a & a & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{k \times k}, \qquad (1)$$

gdzie $a = r_{k-p+ij}$ dla $j \neq k-p+i$ $(i = 1,2,\cdots,p;\ j = 1,2,\cdots,k)$.

Natężenie współliniowości w zbiorze zmiennych objaśniających było zmieniane na skutek zmian wartości współczynnika a, tak by dla odpowiedniego a macierz $R_{(k.p)}(a)$ była macierzą korelacji, czyli każdy jej minor główny musi mieć wartość większą lub równą zero.

[2] Taka lokalizacja p-elementowego zbioru wierszy została wybrana dla jasności prowadzonego wywodu, nie zmienia to jednak ogólności rozważań.

Aby wykazać jaki jest największy przedział określoności współczynnika a, by macierz (1) były macierzą korelacji sformułowano i udowodniono następujące dwa twierdzenia, które są potrzebne do tego celu.

Twierdzenie 1

Jeżeli $k, p \in \mathrm{N}$ (N — zbiór liczb naturalnych) oraz $2 \leq p \leq k-1$, to

$$\det R_{(k,p)}(a) = (1-a)^{p-1}\left[-p(k-p)a^2 + (p-1)a + 1\right], \qquad (2)$$

gdzie $R_{(k,p)}(a)$ jest macierzą określoną wzorem (1).

Dowód

Aby wykazać równość (2) postępujemy według następującego algorytmu:

(1) W wyznaczniku macierzy (1) od kolumny o numerze $k-p+i$ odejmujemy kolumnę o numerze $k-p+i+1$ dla każdego wskaźnika $i = 1, 2, \cdots, p-1$. W wyniku tego przekształcenia otrzymujemy wyznacznik postaci:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a & 1-a & 0 & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a & a-1 & 1-a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

(2) W powyższym wyznaczniku $k-p$ pierwszych kolumn mnożymy przez $-a$ i dodajemy kolejno do ostatniej kolumny. Po tym przekształceniu otrzymujemy następujący wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a & \cdots & a & 1-a & 0 & \cdots & a-(k-p)a^2 \\ a & a & \cdots & a & a-1 & 1-a & \cdots & a-(k-p)a^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a & 0 & 0 & \cdots & 1-(k-p)a^2 \end{vmatrix}.$$

(3) W wyznaczniku otrzymanym powyżej kolumnę o numerze $k-p+i$ mnożymy przez wyrażenie

$$\frac{i(a-(k-p)a^2)}{1-a} \quad (a \neq 1)$$

dla $i = 1, 2, \cdots, p-1$ i odejmujemy kolejno od k-tej kolumny. (Dla $a = 1$ macierz (1) ma p jednakowych kolumn i wtedy jej wyznacznik jest równy 0). W wyniku tego przekształcenia otrzymujemy wyznacznik postaci

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a & \cdots & a & 1-a & 0 & \cdots & 0 \\ a & a & \cdots & a & a-1 & 1-a & \cdots & 0 \\ a & a & \cdots & a & 0 & 0 & \cdots & 1-(k-p)a^2+(p-1)[a-(k-p)a^2] \end{vmatrix}.$$

Ponieważ jest to wyznacznik macierzy trójkątnej dolnej, więc jest on równy następującemu wyrażeniu

$$(1-a)^{p-1}[1-(k-p)a^2+(p-1)(a-(k-p)a^2)].$$

Pokazaliśmy więc, że

$$\det R_{(k,p)}(a) = (1-a)^{p-1}[1-(k-p)a^2+(p-1)(a-(k-p)a^2)]$$

czyli ostatecznie

$$\det R_{(k,p)}(a) = (1-a)^{p-1}[-p(k-p)a^2+(p-1)a+1]$$

c.b.d.o.

Zanim przedstawimy drugie z zapowiedzianych twierdzeń udowodnimy następujący lemat, z którego będziemy korzystać w trakcie dowodu tego twierdzenia.

Lemat 1

Jeżeli $p, k \in N$, $2 \leq p \leq k-1$ oraz $a \in \langle -1, 1\rangle$, to:

$$(1) \quad a_0 \in (-1, 0) \text{ i } b_0 \in (0, 1\rangle \tag{3}$$

$$(2) \quad \det R_{(k,p)}(a) = 0 \Leftrightarrow a = a_0 \vee a = 1 \vee a = b_0 \tag{4}$$

$$(3) \quad \det R_{(k,p)}(a) > 0 \Leftrightarrow a \in (a_0, b_0) \tag{5}$$

$$(4) \quad \det R_{(k,p)}(a) < 0 \Leftrightarrow a \in \langle -1, a_0) \vee (b_0, 1), \tag{6}$$

gdzie

$$a_0 = \frac{p-1-\sqrt{(p-1)^2+4p(k-p)}}{2p(k-p)}, \quad b_0 = \frac{p-1+\sqrt{(p-1)^2+4p(k-p)}}{2p(k-p)}. \tag{7}$$

Dowód

Warunek (3) jest oczywisty na mocy elementarnych przekształceń. Natomiast warunek (4) wynika wprost ze wzorów (7) oraz (2). Z kolei z zależności (2) oraz (4) otrzymujemy następujące równoważności:

$$\det R_{(k,p)}(a) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1 \land a_0 < a < b_0 & \\ a > 1 \land a_0 < a < b_0 \land p-1 & \text{jest parzysta} \\ a > 1 \land (a < a_0 \lor a > b_0) \land p-1 & \text{jest nieparzysta} \end{cases}$$

oraz

$$\det R_{(k,p)}(a) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1 \land (a < a_0 \lor a > b_0) & \\ a > 1 \land (a < a_0 \land a > b_0) \land p-1 & \text{jest parzysta} \\ a > 1 \land (a_0 < a < b_0) \land p-1 & \text{jest nieparzysta} \end{cases}$$

Stąd po uwzględnieniu warunku (3) otrzymujemy, że

$$\det R_{(k,p)}(a) > 0 \Leftrightarrow a_0 < c < b_0 \lor (a > 1 \land p-1 \text{ jest liczbą nieparzystą})$$

oraz

$$\det R_{(k,p)}(a) < 0 \Leftrightarrow a < a_0 \lor b_0 < a < 1 (a > 1 \land p-1 \text{ jest liczbą parzystą})$$

czyli równoważności (5) i (6) dla $a \in \langle -1, 1\rangle$ są prawdziwe,

c.b.d.o.

Twierdzenie 2

Jeżeli $p, k \in N$ I $2 \leq p \leq k-1$, to przedzial $\langle a_0, b_0\rangle$ jest największym przedziałem zawartym w $\langle -1, 1\rangle$ takim, że

$$\bigwedge_{a \in \langle a_0, b_0\rangle} \bigwedge_{i=0,1,\cdots,p-1} \det R_{(k-i,p-i)}(a) \geq 0 \tag{8}$$

gdzie a_0, b_0 określone są wzorem (7), natomiast $R_{(k-i,p-i)}(a)$ jest podmacierzą macierzy (1), która powstaje przez skreślenie w niej i-ostatnich wierszy oraz i-ostatnich kolumn.

Dowód

Niech $a \in \langle -1, 1\rangle$, wówczas z lematu 1 wynika, że

$$\bigwedge_{i=0,\cdots,p-1} a \in \langle a_i, b_i\rangle \Rightarrow \det R_{(k-i,p-i)}(a) \geq 0, \tag{9}$$

gdzie

$$a_i = \frac{p-i-1-\sqrt{(p-i-1)^2 + 4(p-i)(k-p)}}{2(p-i)(k-p)} \quad (i = 0, 1, \cdots, p-1) \tag{10}$$

$$b_i = \frac{p-i-1+\sqrt{(p-i-1)^2+4(p-i)(k-p)}}{2(p-i)(k-p)} \quad (i=0,1,\cdots,p-1) \quad (11)$$

Z warunku (9) wynika, że aby zakończyć dowód wystarczy wykazać, że ciąg (a_i) jest malejący, zaś ciąg (b_i) niemalejący, gdyż wtedy

$$\max_{i=0,1,\cdots,p-1}\{a_i\}=a_0 \text{ oraz } \min_{i=0,1,\cdots,p-1}\{b_i\}=b_0$$

czyli

$$\bigcap_{i=0,1,\cdots,p-1}\langle a_i,0\rangle = \langle a_0,0\rangle \text{ oraz } \bigcap_{i=0,1,\cdots,p-1}\langle 0,b_i\rangle = \langle 0,b_0\rangle$$

Poniżej najpierw wykażemy, że ciąg (a_i) jest malejący czyli, że

$$\bigwedge_{i=0,1,\cdots,p-2} a_i > a_{i+1} \quad (12)$$

Ponieważ dla $a \in (-1,0)$ w myśl lematu 1 mamy warunek

$$\det R_{(k-i-1,p-i-1)}(a) > 0 \Leftrightarrow a \in (a_{i+1},0)\ (i=0,1,\cdots,p-2) \quad (13)$$

więc aby udowodnić nierówność (12) wystarczy wykazać, że

$$\det R_{(k-i-1,p-i-1)}(a_i) > 0\ (i=0,1,\cdots,p-2) \quad (14)$$

gdyż $a_1 \in (-1,0)$ (na mocy lematu 1), czyli wtedy z równoważności (13) otrzymamy, że $a_i > a_{i+1}$ $(i=0,1,\cdots,p-2)$.
W celu wykazania nierówności (14) przekształcamy $\det R_{(k-i,p-i)}(a)$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
&\det R_{(k-i,p-i)}(a) = \\
&= (1-a)^{p-i-1}[-(p-i-1+1)(k-p)a^2+(p-i-2+1)a+1] = \\
&= (1-a)^{p-i-1}[-(p-i-1)(k-p)a^2+(p-i-2)a+1] + \\
&+(1-a)^{p-i-1}[-(k-p)a^2+a] = \\
&= (1-a)\det R_{(k-i-1,p-i-1)}(a) + (1-a)^{p-i-1}[-(k-p)a^2+a].
\end{aligned}$$

Stąd dla $a \neq 1$

$$\det R_{(k-i-1,p-i-1)}(a) = \frac{\det R_{(k-i,p-i)}(a)}{1-a} - (1-a)^{p-i-2}[-(k-p)a^2+a] \quad (15)$$

Ponieważ na mocy lematu 1, $a_i \neq 1$ oraz $\det R_{(k-i,p-i)}(a_i) = 0$, więc

$$\det R_{(k-i-1,p-i-1)}(a_i) = -(1-a_i)^{p-i-2}[-(k-p)a_i^2+a_i]. \quad (16)$$

Z faktu, że $a_i \in (-1,0)$ oraz równości (16) wynika, że

$$\det R_{(k-i-1,p-i-1)}(a_i) > 0 \Leftrightarrow 1 > (k-p)a_i,$$

a stąd korzystając ze wzoru (10) otrzymujemy równoważność

$$\det R_{(k-i-1,p-i-1)}(a_i) > 0 \Leftrightarrow p < k-1 \ (i = 0,1,\cdots,p-2),$$

czyli nierówność (14) jest prawdziwa.
Z kolei udowodnimy, że ciąg (b_i) jest niemalejący czyli, że

$$\bigwedge_{i=0,1,\cdots,p-2} b_i \leq b_{i+1} \tag{17}$$

Ponieważ jak latwo sprawdzić zachodzi następujący warunek

$$b_i = 1 \Leftrightarrow p = k-1 \ (i = 0,1,\cdots,p-2) \tag{18}$$

więc gdy $p = k-1$, to ciąg (b_i) jest ciągiem stałym.
Z lematu 1 wynika, że $b_i \in (0,1\rangle$ więc należy jeszcze rozważyć przypadek gdy $b_i \in (0,1)$. Poniżej pokażemy, że w tym przypadku ciąg (b_i) jest ciągiem rosnącym.
Ponieważ dla $b_i \in (0,1)$ z warunku (5) wynika, że

$$\det R_{(k-i-1,p-i-1)}(b_i) > 0 \Leftrightarrow b_i \in (0, b_{i+1}) \ (i = 0,1,\cdots,p-2),$$

więc aby udowodnić nierówność

$$b_i < b_{i+1} \ \ (i = 0,1,\cdots,p-2)$$

wystarczy wykazać następującą równoważność

$$\det R_{(k-i-1,p-i-1)}(b_i) > 0 \Leftrightarrow p < k-1 \ (i = 0,1,\cdots,p-2).$$

Zauważmy, że dla $b_i \neq 1$ na mocy zależności (4) i (15) zachodzi równość

$$\det R_{(k-i-1,p-i-1)}(b_i) = -(1-b_i)^{p-i-2}[-(k-p)b_i^2 + b_i] \ (i = 0,1,\cdots,p-2). \tag{19}$$

Z kolei wykorzystując wzór (11) i (19) otrzymujemy po przeksztalceniu, że

$$\det R_{(k-i-1,p-i-1)}(b_i) > 0 \Leftrightarrow p < k-1,$$

c.b.d.o.

Na podstawie twierdzenia 2 widzimy, że macierz (1) jest macierzą korelacji wtedy i tylko wtedy gdy $a \in \langle a_0, b_0 \rangle$ lub $a = 1$. Natężenie współliniowości w zbiorze zmiennych objaśniających o macierzy korelacji określonej wzorem (1) możemy zmieniać w sposób regularny np. dzieląc a_0 lub b_0 przez dowolną liczbę naturalną m. Wtedy otrzymujemy następujące wzory:

$$a^{(r)} = \frac{p-1-\sqrt{(p-1)^2+4p(k-p)}}{2mp(k-p)}(r-1) \quad (r = 1, 2, \cdots, m+1) \qquad (20)$$

$$b^{(r)} = \frac{p-1+\sqrt{(p-1)^2+4p(k-p)}}{2mp(k-p)}(r-1) \quad (r = 1, 2, \cdots, m+1) \qquad (21)$$

określające $m+1$ kolejnych wartości współczynnika a odpowiednio dla $a \in \langle a_0, 0 \rangle$ oraz $\langle b_0, 0 \rangle$.

Aby się przekonać jaka jest monotoniczność funkcji $\det R_{(k,p)}(a)$ w przedziale $< a_0, b_0 >$ udowodnimy następujące

Twierdzenie 3

Jeżeli $p, k \in \mathrm{N}$ oraz $2 \leq p \leq k-1$, to funkcja $\det R_{(k,p)}(a)$ rośnie w przedziale $\langle a_0, 0)$ oraz maleje w przedziale $(0, b_0)$.

Dowód

Korzystamy z następujących implikacji

$$(1) \quad \bigwedge_{x\in(x_1,x_2)} f'(x) < 0 \Rightarrow \text{funkcja } f \text{ jest malejąca w } (x_1, x_2) \qquad (22)$$

$$(2) \quad \bigwedge_{x\in(x_1,x_2)} f'(x) > 0 \Rightarrow \text{funkcja } f \text{ jest malejąca w } (x_1, x_2) \qquad (23)$$

Zauważmy, że pochodna funkcji $\det R_{(k,p)}(a)$ liczona względem zmiennej a wyraża się wzorem

$$(\det R_{(k,p)}(a))' = (1-a)^{p-2}p[(k-p)(p+1)a^2 - (2(k-p)+p-1)a] \qquad (24)$$

Z równości (24) wynika, że

$$(\det R_{(k,p)}(a))' < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1 \wedge 0 < a < \frac{p-1+2(k-p)}{(k-p)(p+1)} \vee \\ a > 1 \wedge 0 < a < \frac{p-1+2(k-p)}{(k-p)(p+1)} \wedge p \text{ jest parzysta} \vee \\ a > 1 \wedge (a < 0 \vee a > \frac{p-1+2(k-p)}{(k-p)(p+1)} \wedge p \text{ jest nieparzysta} \end{cases}$$

Ale dla $p \leq k-1$ prawdziwa jest nierówność

$$0 < \frac{p-1+2(k-p)}{(k-p)(p+1)} \leq 1, \qquad (25)$$

więc

$$(\det R_{(k,p)}(a))' < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < \frac{p-1+2(k-p)}{(k-p)(p+1)} \\ \vee \\ a > 1 \wedge p \text{ jest liczbą nieparzystą} \end{cases} \tag{26}$$

Ponieważ jak łatwo sprawdzić zachodzi nierówność

$$\frac{p-1+\sqrt{(p-1)^2+4p(k-p)}}{2p(k-p)} \leqslant \frac{p-1+2(k-p)}{(k-p)(p+1)},$$

więc z warunku (22), (26) oraz powyższej nierówności wynika, że jeśli

$$a \in (0, \frac{p-1+\sqrt{(p-1)^2+4p(k-p)}}{2p(k-p)}),$$

to $\det R_{(k,p)}(a)$ jest funkcją malejącą.
Z kolei

$$(\det R_{(k,p)}(a))' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \vee \\ \frac{p-1+2(k-p)}{(k-p)(p+1)} < a < 1 \\ a > 1 \wedge p \text{ jest liczbą parzystą}, \end{cases}$$

czyli z warunku (23) wynika, że jeśli

$$a \in < \frac{p-1-\sqrt{(p-1)^2+4p(k-p)}}{2p(k-p)}, 0),$$

to $\det R_{(k,p)}(a)$ jest funkcją rosnącą.

c.b.c.o.

Z twierdzenia 3 wynika, że zmieniając wartości współczynnika a w myśl wzorów (20) lub (21) dla kolejnych wartości r powodujemy, że wartość wyznacznika macierzy (1) zmienia się w sposób malejący od maksymalnej wartości równej 1 do minimalnej równej 0, tzn. natężenie współliniowości zmienia się do najmniejszej do najwiekszej osiągalnej wartości. W celu wygenerowania k-wymiarowej zmiennej losowej (k zmiennych objaśniających) o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)$ i odchyleniem standardowym $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k)$ oraz macierzą korelacji $R_{(k,p)}(a)$ korzystano z następującego wzoru[3]

$$X = CY + \mu,$$

[3] Por. pracę [2].

gdzie $Y = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$ jest k-wymiarową zmienną losową, dla której $Y_j (j = 1, 2, \cdots, k)$ są niezależne i mają jednakowy rozkład N(0,1) zaś C jest macierzą nieosobliwą taką, że CC^T jest macierzą wariancji-kowariancji zmiennej losowej X.

Dla każdej wartości $a^{(r)} (r = 1, 2, \cdots, m+1)$ wstawionej w miejsce a w macierzy (1) otrzymywano, wykorzystując powyższy generator k-zmiennych objaśniających oraz zmienną objaśnianą a następnie odpowiadający im liniowy model (takie rozważano w niniejszej pracy) estymowano metodą najmniejszych kwadratów. Po estymacji obliczano wartość wszystkich badanych mierników współliniowości. Ponieważ opisane postępowanie powtarzano $m+1$ razy więc dla każdego miernika współliniowości otrzymano $m+1$ różnych jego wartości, odpowiadających kolejno coraz większemu natężeniu współliniowości. Aby otrzymaną w ten sposób zależność danego miernika współliniowości od natężenia współliniowości opisać odpowiednią funkcją natężenie to wyrażano za pomocą wyznacznika macierzy korelacji. Następnie dla każdego miernika współliniowości aproksymowano otrzymane dla niego wartości wykresem tej funkcji wybranej spośród kilkunastu różnych typów funkcji, dla której współczynnik indeterminacji był najmniejszy. Potem dla wszystkich analizowanych mierników współliniowości obliczano wartości następujących charakterystyk zmienności funkcji:

— średniej prędkości względnej v_{SW} oraz średniego przyspieszenia względnego a_{SW} zmiany wartości funkcji w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$,

— prędkości względnej v_W oraz przyspieszenia względnego a_W zmiany wartości funkcji w punkcie 0 i 1,

— średniej elastyczności e_S funkcji w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$ oraz elastyczności e funkcji w punkcie 0 i 1.

Jeżeli chodzi o uporządkowanie mierników współliniowości według miary $|v_{SW}|$, to układają się one w następującej kolejności (od najmniejszej do największej)

$$H, \bar{H}, \bar{Q}, \bar{\delta}, \overline{t(\bar{\beta})}, G, \bar{G}, \bar{\bar{\beta}}, Q, \bar{\bar{d}}, \bar{m}, F', g, \chi^2_H, \bar{p}, \bar{r}, \lambda, \chi^2_F, \bar{\omega},$$

przy czym wartości miary $|v_{SW}|$ dla mierników λ, χ^2_F oraz $\bar{\omega}$ dość znacznie różnią się od wartości tej miary dla pozostałych mierników. Ze względu na miarę $|v_W(1)|$ rangi od najmniejszej do największej otrzymują kolejno mierniki:

$$\bar{Q}, \bar{G}, \overline{t(\bar{\beta})}, \bar{\bar{d}}, \bar{m}, \bar{\delta}, \bar{\bar{\beta}}, H, \bar{H}, Q, G, F', g, \bar{p}, \chi^2_H, \bar{r}, \chi^2_F, \bar{\omega}, \lambda.$$

Z kolei w wyniku porządkowania mierników współliniowości ze względu na bezwzględną wartość miary $v_W(0)$, rangi od najmniejszej do największej

otrzymują kolejno mierniki:

$$H, \bar{H}, Q, \bar{\delta}, G, \bar{\tilde{\beta}}, \bar{Q}, F', \bar{G}, \overline{t(\hat{\beta})}, \bar{\tilde{d}}, \bar{m}, \bar{p}, \bar{r}, \lambda, \chi^2_F, g, \bar{\omega}, \chi^2_H.$$

Miara $|v_W(0)|$ dla mierników χ^2_F, g, $\bar{\omega}$, χ^2_H przyjmuje zdecydowanie większe wartości aniżeli w przypadku pozostałych mierników współliniowości. Jeżeli chodzi o miarę elastyczności średniej oraz elastyczności w punktach 1,0 to mierniki współliniowości otrzymują analogicznie rangi jak odpowiednio w przypadku miar v_{SW}, $v_W(1)$, $v_W(0)$. Z kolei miary $|a_{SW}|$, $|a_W(1)|$, $|a_W(0)|$ przyjmują największą wartość dla miernika $\bar{\omega}$, natomiast najmniejszą dla miernika H. Uporządkowanie wszystkich mierników współliniowości pod względem wyżej wymienionych miar przedstawia tablica 1.

Tab. 1. Bezwzględne wartości miar a_{SW}, $a_W(1)$, $a_W(0)$ dla mierników współliniowości

The absolute value of measurements a_{SW}, $a_W(1)$, $a_W(0)$ for the measurements of collinearity

Mierniki	$\vert a_{SW}\vert$	$\vert a_W(1)\vert$	$\vert a_W(0)\vert$
H	0,196	0,196	0,573
$\bar{H}$	0,196	0,196	0,573
$\bar{\delta}$	0,573	0,196	0,573
χ^2_H	0,573	0,196	,0573
G	1,640	0,317	1,099
$\bar{Q}$	2,244	0,393	1,146
$\overline{t(\hat{\beta})}$	2,244	0,393	1,146
$\bar{\tilde{\beta}}$	2,244	0,393	1,146
Q	2,244	0,393	1,146
F'	2,244	0,393	1,146
g	2,244	0,393	1,146
λ	2,244	0,393	1,146
$\bar{r}$	2,982	0,440	1,283
$\bar{\tilde{d}}$	5,716	0,453	2,085
$\bar{m}$	5,716	0,453	2,085
$\bar{G}$	5,891	0,465	2,124
$\bar{p}$	9,197	0,467	3,037
χ^2_F	91,847	0,714	7,041
$\bar{\omega}$	802,158	0,749	21,774

Źródło: opracowania własne.

Z przeprowadzonych badań wynika, że mierniki współliniowości reagują na zmianę natężenia współliniowości bardzo różnie. Największą „zmienność" wartości wskutek rosnącego natężenia współliniowości wykazują mierniki $\bar{\omega}$, χ_F, natomiast najmniejszą (oprócz miary $v_W(1)$) mierniki H, $\bar{H}$, $\bar{\delta}$.

LITERATURA

[1] Farrar D. E., Glauber R. R.: Multicollinearity in Regression Analysis: The Problem Revisited, „Review of Economics and Statistics", 1967, vol. 49.

[2] Gordon G.: Symulacja systemów, WNT, Warszawa 1974.

[3] Grabiński T., Zeliaś A.: Metody doboru zmiennych w modelach ekonometrycznych, PWN, Warszawa 1982.

[4] Gruszczyński M.: Współliniowość zmiennych i jej wpływ na estymację modeli ekonometrycznych. Praca doktorska (maszynopis), SGPiS, Warszawa 1977.

[5] Gruszczyński M., Kolupa M., Leniewska E., Napiórkowski G.: Miary zgodności, metody doboru zmiennych, problemy współliniowości, (M. Kolupa red.) PWN, Warszawa 1979.

[6] Haitovsky Y.: Multicollinearity in Regression Analysis: Comment, „Review of Economics and Statistics" 1969, vol. LI.

[7] Hellwig Z.: Zastosowanie przekształcenia ortogonalnego do wyznaczania dopuszczalnych wartości zmiennych objaśniających w modelach ekonometrycznych, „Przegląd Statystyczny" 1974, nr 3.

[8] Hellwig Z.: Problem optymalnego wyboru predykant, „Przegląd Statystyczny" 1969, nr 3-4.

[9] Hoerl A. E., Kennard R. W.: Ridge Regressions: Biased Estimation for Non-Orthogonal Problems, „Technometrics" 1970, vol. 12.

[10] Johnston J.: Econometric Methods, Mc Graw-Hill, New York 1972.

[11] Kosiorowska M.: Wielokrotna współliniowość zmiennych i jej wpływ na efektywność estymacji paramterów modeli ekonometrycznych. Praca doktorska (maszynopis), Akademia Ekonomiczna w Krakowie, Kraków 1979.

[12] Malinvaud E.: Methodes statistiques de'econometrie, DUNOD, Paris 1969.

[13] Mc Callum B. T.: Artificial Orthogonalization in Regression Analysis, „The Review of Economics and Statistics" 1970, vol. LII.

[14] Pawłowski Z.: Ekonometria, wyd. 6, PWN, Warszawa 1980.

[15] Schips B., Stier W.: Bestimmung der Auswirkung von Multikollinearität zwischen den erklärenden Variablen in linearen Regressionsmodellen auf Kleinst-Quadrate Schätzwerte durch Simulation, „Statistische Hefte" 1971, nr 2.

[16] Webster J. T., Mansfield E. R., Gunst R. F.: An Analytic Variable Selection Technique for Principal Component Regression, „Applied Statistics" 1977, nr 1.

[17] Zeliaś A.: Problemy zastosowania pewnej metody analizy czynnikowej w badaniach nad rejonalizacją rolniczą, „Przegląd Statystyczny" 1970, nr 3-4.

[18] Zeliaś A.: Ekonometryczne metody budowy prognoz, Zeszyty Naukowe WSE Kraków, Seria Specjalna: Rozprawy Habilitacyjne 1970, nr 20.

[19] Zeliaś A.: Niektóre aspekty wyników badania współliniowości w jednorównaniowych modelach regresji, „Folia Oeconomica Cracoviensia" 1974, vol. XV.

SUMMARY

The present paper is devoted to a stimulating experiment concerning a comparison of the characteristics of variability of functions describing certain selected measurements of collinearity between the interpretative variables of the model.